Условия и решения заданий

Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

2014-2015 учебный год

Оглавление

9 классы 2
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ (очный этап) 2
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ (очный этап) 3
10 классы 6
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ (очный этап) 6
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ (очный этап) 7
11 классы 10
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ (очный этап) 10
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ (очный этап) 11
9, 10, 11 классы 15
УСЛОВИЯ И ОТВЕТЫ (отборочный этап) 15

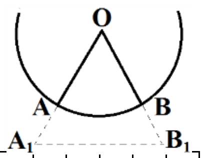
Вариант 1

1. (10 баллов) Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

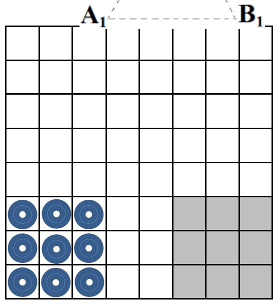
80658175170943878571660636856403766975289505440883277 8x4000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

2. (10 баллов) Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60^0. Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1. Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)



3. (10 баллов) На доске 8x8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.



4. (10 баллов) Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

5. (10 баллов) Уравнения $x^4+2x^3-x^2-2x-3=0$ и $x^4+3x^3+x^2-4x-6=0$ имеют два общих корня. Найдите их.

6. (20 баллов) Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), $1\le a\le 10, 1\le b\le 10, a>b$, для которых число $a^{2015}+b^{2015}$ делится нацело на число $a-b$?

7. (20 баллов) Числа a,b удовлетворяют равенствам $a^3-3a^2+5a=1$ и $b^3-3b^2+5b=5$. Найдите $a+b$.

8. (10 баллов) Имеется n целых чисел $0,1,2,\ldots,n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую *перестановку* $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$. Из исходного набора чисел $(0,1,2,\ldots,n-1)$ и этой перестановки $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ получим новый набор чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ по правилу: $a_1=r_n(0+i_1), a_2=r_n(1+i_2),\ldots,a_n=r_n((n-1)+i_n)$, где $r_n(m)$ – остаток от деления числа m на число n. (Например, пусть $n=3$. Тогда, из исходного набора (0,1,2) и перестановки $(i_1,i_2,i_3)=$ (1,2,0) получится набор $(a_1,a_2,a_3)=$(1,0,2), т.к. $r_3(0+1)=1, r_3(1+2)=0, r_3(2+0)=2$).

а) При $n=5$ приведите пример такой перестановки $(i_1,i_2,\ldots,i_5)$, что в соответствующем наборе $(a_1,a_2,\ldots,a_5)$ все числа различны;

б) докажите, что, если $n=6$, то какую бы перестановку $(i_1,i_2,\ldots,i_6)$ мы ни взяли, в наборе $(a_1,a_2,\ldots,a_6)$ обязательно встретятся одинаковые числа.

Вариант 1

1. Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

806581751709438785716606368564037669752895054408832778x4000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

Решение: В разложении числа 52! на простые множители,

$$52! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \ldots, \qquad (1)$$

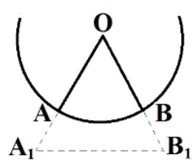
степень пятерки $c = 12$. Действительно, множитель 5 дают числа 5,10,15,20, 25..., причем разложения чисел 25 и 50 содержат 5 во второй степени. Степень же двойки a, очевидно, существенно больше 12. Рассмотрим произведение простых сомножителей в правой части (1). Каждый ноль на конце десятичной записи числа 52! – результат перемножения одной 2 и одной 5. Именно поэтому нулей на конце тоже 12. Двоек у нас существенно больше, чем пятерок, поэтому, если в записи числа 52! отбросить все нули на конце, то получившееся в результате число

806581751709438785716606368564037669752895054408832778x4 (2)

будет делиться на 2 в достаточно высокой степени. В частности, число (2) делится на 2^4=16, а это значит, что на 16 делится число, образованное его четырьмя последними цифрами. Прямым перебором находим, что число 78x4 делится на 16 только при x=2.

Ответ: 2.

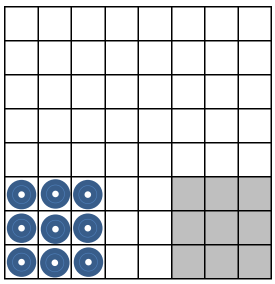
2. Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60^0. Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1. Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)

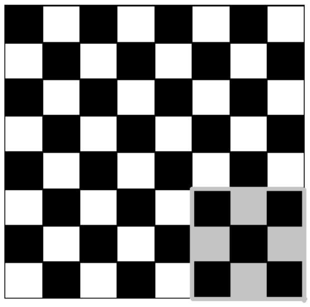


Решение: Длина дуги AB в шесть раз меньше длины окружности и равна $\pi R/3$. Длина основания A_1B_1 равна $2OA_1 \sin\frac{\angle AOB}{2} = 2R\cdot 1,05\sin 30^0 = 1,05R.$ Остается заметить, что $\pi/3 < 1,05.$

Ответ: длина отрезка больше длины дуги.

3. На доске 8x8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.





Решение: Раскрасим клетки в белый и черный цвет. В результате хода перемещаемая шашка из белой клетки попадает вновь в белую, а из черной в черную. Значит, количество белых клеток, занимаемых шашками, всегда одно и то же. Остается заметить, что в правом нижнем углу шашки бы занимали 4 белые клетки, а в исходном положении они занимают 5 белых клеток. Поэтому переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол невозможно.

Ответ: нельзя.

4. Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

Решение: Целые части чисел a и b равны в том и только том случае, когда полуинтервал $(a,b]$ не содержит целые числа. Предположим противное: пусть при некотором натуральном n имеет место неравенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]\neq\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Тогда $\exists m\in N:\sqrt{4n+1}<m\leq\sqrt{4n+3}\Leftrightarrow 4n+1<m^2\leq 4n+3.$ Следовательно, m^2 равен либо $4n+2,$ либо $4n+3.$ Но квадрат целого числа при делении на 4 не может дать остаток 2 или 3. Полученное противоречие доказывает требуемое равенство.

5. Уравнения $x^4+2x^3-x^2-2x-3=0$ и $x^4+3x^3+x^2-4x-6=0$ имеют два общих корня. Найдите их.

Решение: Поделим многочлен $P(x)=x^4+2x^3-x^2-2x-3$ на многочлен $Q(x)=x^4+3x^3+x^2-4x-6$ с остатком: $P(x)=F(x)Q(x)+R(x).$ Общие корни многочленов $P(x),Q(x)$ являются, очевидно, и корнями остатка $R(x)=-x^3-2x^2+2x+3.$ Поделив теперь $Q(x)$ на $R(x),$ получим в остатке $x^2+x-3.$ Корни последнего многочлена и будут искомыми.

Ответ: $\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$

6. Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), $1\leq a\leq 10, 1\leq b\leq 10, a>b,$ для которых число $a^{2015}+b^{2015}$ делится нацело на число $a-b$?

Решение: Обозначим $c=a-b.$ Сразу отметим, что

$$a=b+c\leq 10. \qquad (1)$$

Далее, $a^{2015}+b^{2015}=\left(b+c\right)^{2015}+b^{2015}=\ldots+2b^{2015}.$ Здесь троеточием обозначены слагаемые, заведомо делящиеся на $c.$ Таким образом, число $a^{2015}+b^{2015}$ делится на число c в том и только том случае, когда на c делится произведение $2b^{2015}.$ Последнее возможно, например, когда $c=1$ или $c=2.$ Для $c=1$ получаем **9** пар : (2,1), (3,2),..., (10,9), а в случае $c=2$ – **8** пар: (3,1), (4,2),..., (10,8).

Пусть теперь $c>2.$ Изучим делимость $2b^{2015}$ на c при всех значениях $b\in[1;9]$:

1) $b=1,$ тогда $c=2.$ Этот случай уже рассмотрен;

2) $b=2,$ тогда $c\in\{4,8\}$. Находим **2** пары (a,b): (6,2), (10,2);

3) $b=3,$ тогда $c\in\{3,6,9\}$. **2** пары: (6,3), (9,3). Случай $c=9$ не удовлетворяет (1);

4) $b=4,$ тогда $c\in\{4,8\}$. **1** пара: (8,4). Случай $c=8$ не удовлетворяет (1);

5) $b=5,$ тогда $c\in\{5,10\}$. **1** пара: (10,5). Случай $c=10$ не удовлетворяет (1);

6) $b=6,$ тогда $c\in\{3,4,6,9\}$. **2** пары: (9,6), (10,6). Случаи $c=6$ и $c=9$ не удовлетворяют (1);

7) $b=7,$ тогда $c=7$. Этот случай не удовлетворяет (1);

8) $b=8,$ тогда $c\in\{4,8\}$. Этот случай не удовлетворяет (1).

Случай $b=9$ также ничего не дает в силу (1).

Ответ: 25 пар.

7. Числа a, b удовлетворяют равенствам $a^3-3a^2+5a=1$ и $b^3-3b^2+5b=5$. Найдите $a+b$.

Решение: Перепишем левые части равенств следующим образом:

$$a^3-3a^2+5a=(a-1)^3+2a+1=(a-1)^3+2(a-1)+3,$$
$$b^3-3b^2+5b=(b-1)^3+2b+1=(b-1)^3+2(b-1)+3.$$

Выполнив замену $A=a-1,\ B=b-1,$ представим данные в условии равенства в виде:

$$A^3+2A+2=0,\qquad B^3+2B-2=0.$$

Сложив их, получим $(A+B)(A^2-AB+B^2+2)=0 \Leftrightarrow A+B=0.$ Отсюда $a+b=2.$

Ответ: 2.

8. Имеется n целых чисел $0,1,2,\ldots,n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую *перестановку* $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$. Из исходного набора чисел $(0,1,2,\ldots,n-1)$ и этой перестановки $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ получим новый набор чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ по правилу: $a_1=r_n(0+i_1),\ a_2=r_n(1+i_2),\ldots,a_n=r_n((n-1)+i_n)$, где $r_n(m)$ – остаток от деления числа m на число n. (Например, пусть $n=3$. Тогда, из исходного набора (0,1,2) и перестановки $(i_1,i_2,i_3)=$ (1,2,0) получится набор $(a_1,a_2,a_3)=(1,0,2)$, т.к. $r_3(0+1)=1,\ r_3(1+2)=0,\ r_3(2+0)=2.$)

а) При $n=5$ приведите пример такой перестановки $(i_1,i_2,\ldots,i_5)$, что в соответствующем наборе $(a_1,a_2,\ldots,a_5)$ все числа различны;

б) докажите, что, если $n=6,$ то какую бы перестановку $(i_1,i_2,\ldots,i_6)$ мы ни взяли, в наборе $(a_1,a_2,\ldots,a_6)$ обязательно встретятся одинаковые числа.

Решение: а) Например, $(i_1,i_2,\ldots,i_5)=(3,4,0,1,2)$;

б) По условию $(0+1+\ldots+5)+(i_1+\ldots+i_6)=a_1+\ldots+a_6 \pmod 6$. Если бы все a_i были различны, то сумма чисел в правой части была бы равна 15. Но равенство $15+15=15 \pmod 6$ не справедливо. Поэтому среди чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_6)$ есть одинаковые.

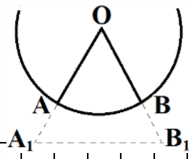
Вариант 1

1. (10 баллов) Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответт:

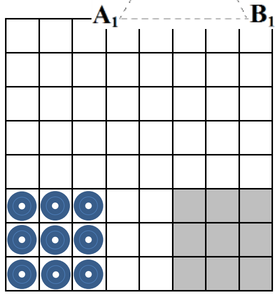
80658175170943878571660636856403766975289505440883277 8x4000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

2. (10 баллов) Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60^0. Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1.Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)



3. (10 баллов) На доске 8x8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.



4. (15 баллов) Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

5. (10 баллов) Уравнения $x^4+2x^3-x^2-2x-3=0$ и $x^4+3x^3+x^2-4x-6=0$ имеют два общих корня. Найдите их.

6. (15 баллов) Пусть $f(x)=x^3-x+1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m, больших единицы, числа $m, f(m), f(f(m))$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа a,b,c называют *попарно взаимно простыми*, если каждое из них больше 1, и никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7,8,15 попарно взаимно просты, а числа 5,8,15 – нет.)

7. (15 баллов) Докажите неравенство $a(a-1)^2+b(b-1)^2+c(c-1)^2\le\frac{4}{9}$, если известно, что a,b,c – неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $a+b+c=1$.

8. (15 баллов) В классе 10 учеников. Из них требуется сформировать две команды (одну для уборки актового зала, вторую – для работы на пришкольном участке). При этом: 1) количество людей в командах может быть различным (но отличным от нуля), 2) каждый ученик может быть членом только одной команды или не входить в эти команды вовсе. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 1

1. Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

80658175170943878571660636856403766975289505440883277x84000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

Решение: В разложении числа 52! на простые множители,

$$52! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \ldots, \qquad (1)$$

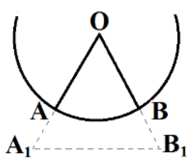
степень пятерки $c = 12$. Действительно, множитель 5 дают числа 5,10,15,20, 25..., причем разложения чисел 25 и 50 содержат 5 во второй степени. Степень же двойки a, очевидно, существенно больше 12. Рассмотрим произведение простых сомножителей в правой части (1). Каждый ноль на конце десятичной записи числа 52! – результат перемножения одной 2 и одной 5. Именно поэтому нулей на конце тоже 12. Двоек у нас существенно больше, чем пятерок, поэтому, если в записи числа 52! отбросить все нули на конце, то получившееся в результате число

$$806581751709438785716606368564037669752895054408832778x4 \qquad (2)$$

будет делиться на 2 в достаточно высокой степени. В частности, число (2) делится на 2^4=16, а это значит, что на 16 делится число, образованное его четырьмя последними цифрами. Прямым перебором находим, что число 78x4 делится на 16 только при x=2.

Ответ: 2.

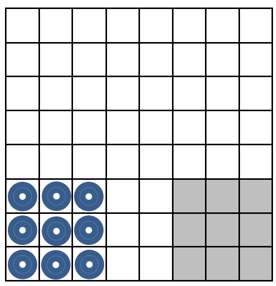
2. Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60^0. Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1. Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)

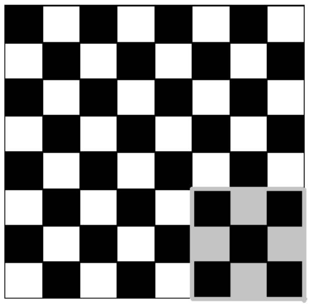


Решение: Длина дуги AB в шесть раз меньше длины окружности и равна $\pi R/3$. Длина основания A_1B_1 равна $2OA_1 \sin\frac{\angle AOB}{2} = 2R \cdot 1,05 \sin 30^0 = 1,05R.$ Остается заметить, что $\pi/3 < 1,05.$

Ответ: длина отрезка больше длины дуги.

3. На доске 8x8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.





Решение: Раскрасим клетки в белый и черный цвет. В результате хода перемещаемая шашка из белой клетки попадает вновь в белую, а из черной в черную. Значит, количество белых клеток, занимаемых шашками, всегда одно и то же. Остается заметить, что в правом нижнем углу шашки бы занимали 4 белые клетки, а в исходном положении они занимают 5 белых клеток. Поэтому переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол невозможно.

Ответ: нельзя.

4. Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

Решение: Целые части чисел a и b равны в том и только том случае, когда полуинтервал $(a,b]$ не содержит целые числа. Предположим противное: пусть при некотором натуральном n имеет место неравенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]\neq\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Тогда $\exists m\in N: \sqrt{4n+1}<m\leq\sqrt{4n+3}\Leftrightarrow 4n+1<m^2\leq 4n+3$. Следовательно, m^2 равен либо $4n+2$, либо $4n+3$. Но квадрат целого числа при делении на 4 не может дать остаток 2 или 3. Полученное противоречие доказывает требуемое равенство.

5. Уравнения $x^4+2x^3-x^2-2x-3=0$ и $x^4+3x^3+x^2-4x-6=0$ имеют два общих корня. Найдите их.

Решение: Поделим многочлен $P(x)=x^4+2x^3-x^2-2x-3$ на многочлен $Q(x)=x^4+3x^3+x^2-4x-6$ с остатком: $P(x)=F(x)Q(x)+R(x)$. Общие корни многочленов $P(x),Q(x)$ являются, очевидно, и корнями остатка $R(x)=-x^3-2x^2+2x+3$. Поделив теперь $Q(x)$ на $R(x)$, получим в остатке x^2+x-3. Корни последнего многочлена и будут искомыми.

Ответ: $\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

6. Пусть $f(x)=x^3-x+1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m, больших единицы, числа $m, f(m), f(f(m))$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа a,b,c называют *попарно взаимно простыми*, если каждое из них больше 1, и никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7,8,15 попарно взаимно просты, а числа 5,8,15 – нет.)

Решение: Заметим, что $m^3>m$ при $m>1$, и, следовательно, числа $f(m)$ и $f(f(m))$ отличны от 1. Докажем, что числа m и $f(m)$ взаимно просты. Предположим противное: у них есть общий делитель $d \neq 1$. Рассмотрим равенство $f(m) = m^3 - m + 1$. В правой части на d делятся все слагаемые кроме свободного члена, следовательно правая часть на d не делится. Но левая часть делится на d по предположению. Пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что и числа $f(m)$ и $f(f(m))$ взаимно просты. Чтобы доказать, что взаимно просты числа m и $f(f(m))$, достаточно заметить, что $f(f(m))$ представляет собой многочлен от m со свободным членом, равным единице: $f(f(m)) = m^9 + \ldots + 1$. Далее остается провести те же рассуждения, что и при доказательстве взаимной простоты чисел m и $f(m)$.

7. Докажите неравенство $a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 \leq \frac{4}{9}$, если известно, что a, b, c – неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $a + b + c = 1$.

Решение: Равенство $a+b+c=1$ перепишем в виде $a-1/3+b-1/3+c-1/3=0$. Замена $A=-a+1/3, B=-b+1/3, C=-c+1/3$. И, поскольку числа a,b,c не превосходят 1, имеют место неравенства

$$A, B, C \geq -2/3. \qquad (1)$$

В новых переменных $a(a-1)^2+b(b-1)^2+c(c-1)^2 = -A^3 - A^2 - B^3 - B^2 - C^3 - C^2 + 4/9$, и доказываемое неравенство принимает вид $A^2 + A^3 + B^2 + B^3 + C^2 + C^3 \geq 0$ или $A^2(1+A) + B^2(1+B) + C^2(1+C) \geq 0$. Это неравенство, очевидно, выполнено в силу (1).

Отметим, что возможно решение, использующее производную: несложно показать, что $\max\limits_{0 \leq x \leq 1}\left(x(x-1)^2\right) = 4/27$, *максимум достигается при* $x = 1/3$.

8. В классе 10 учеников. Из них требуется сформировать две команды (одну для уборки актового зала, вторую – для работы на пришкольном участке). При этом: 1) количество людей в командах может быть различным (но отличным от нуля), 2) каждый ученик может быть членом только одной команды или не входить в эти команды вовсе. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Каждого человека мы должны вписать в один из трех списков: 1) "команда 1", 2) "команда 2", 3) "люди, не вошедшие ни в одну из команд". Распределить 10 человек по этим спискам можно 3^{10} способами. Это и был бы ответ в задаче, если бы не требование, что списки 1 и 2 не пусты. Значит из общего числа 3^{10} надо вычесть те распределения учеников, когда список 1 или 2 (или они оба) пуст. Распределить учеников так, чтоб список 1 был пуст можно 2^{10} способами (у каждого ученика две возможности: отправиться в список 2 или 3). Аналогично, количество распределений учеников, при которых будет пустым список 2, также равно 2^{10}. Значит, из 3^{10} надо вычесть $2 \cdot 2^{10}$, но при этом вариант, когда все ученики находятся в списке 3, мы учли 2 раза. Поэтому, окончательный ответ: $3^{10}-2 \cdot 2^{10}+1$ способ.

Ответ: $3^{10}-2 \cdot 2^{10}+1$.

Вариант 1

1. (12 баллов) Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m, больших единицы, числа $m, f(m), f\big(f(m)\big)$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа a,b,c называют *попарно взаимно простыми*, если никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7,8,15 попарно взаимно просты, а числа 5,8,15 – нет.)

2. (12 баллов) Даны три числа a, b, c такие, что $a + b + c = 1$ и $a, b, c \geq 0$. Докажите, что $a(a-1)^2 + +b(b-1)^2 + c(c-1)^2 \leq \frac{4}{9}$.

3. (12 баллов) Уравнения $x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 6 = 0$ имеют два общих корня. Найдите их.

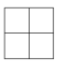
4. (12 баллов) Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $n > 2015$ и $\left[\sqrt{9n+2}\right] \neq \left[\sqrt{9n+4}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

5. (12 баллов) Имеется n целых чисел $0,1,2,\ldots,n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую *перестановку* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Из исходного набора чисел $(0,1,2,\ldots,n-1)$ и этой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ получим новый набор чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ по правилу: $a_1 = r_n(0+i_1), a_2 = r_n(1+i_2), \ldots, a_n = r_n((n-1)+i_n)$, где $r_n(m)$ – остаток от деления числа m на число n. (Например, пусть $n = 3$. Тогда, из исходного набора (0,1,2) и перестановки (i_1, i_2, i_3) = (1,2,0) получится набор $(a_1, a_2, a_3) = (1,0,2)$, т.к. $r_3(0+1)=1, r_3(1+2)=0, r_3(2+0)=2$.)

а) При $n = 9$ приведите пример такой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_9)$, что в соответствующем наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_9)$ все числа различны;

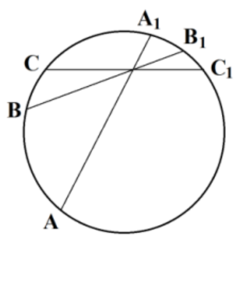
б) докажите, что, если $n = 10$, то какую бы перестановку $(i_1, i_2, \ldots, i_{10})$ мы ни взяли, в наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ обязательно встретятся одинаковые числа.

6. (14 баллов) Дно прямоугольного ящика заложили плитками двух типов так, что всё дно ими покрыто, и ни одна из плиток даже частично не накрывает другую. После транспортировки одна из плиток первого типа оказалась повреждённой, и её заменили плиткой второго типа. Могло ли так оказаться, что все плитки снова удалось уложить в ящик так, что дно оказалось вновь полностью покрытым? Ответ обоснуйте.

 -1 тип  - 2 тип

7. (12 баллов) Найдите значение выражения $a^4 + b^4 + c^4$, если известно, что числа a,b,c удовлетворяют соотношениям: $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ a^3+b^3+c^3=19. \end{cases}$

8. (14 баллов) В окружности три хорды AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Угловые меры дуг AC_1, AB, CA_1 и A_1B_1 равны соответственно $150^0, 30^0, 60^0$ и 30^0. Найдите угловую меру дуги B_1C_1.



Вариант 1

1. Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m, больших единицы, числа $m, f(m), f\big(f(m)\big)$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа *a,b,c* называют *попарно взаимно простыми*, если каждое из них больше 1, и никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7,8,15 попарно взаимно просты, а числа 5,8,15 – нет.)

Решение: Заметим, что $m^3 > m$ при $m > 1$, и, следовательно, числа $f(m)$ и $f(f(m))$ отличны от 1. Докажем, что числа m и $f(m)$ взаимно просты. Предположим противное: у них есть общий делитель $d \neq 1$. Рассмотрим равенство $f(m) = m^3 - m + 1$. В правой части на d делятся все слагаемые кроме свободного члена, следовательно правая часть на d не делится. Но левая часть делится на d по предположению. Пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что и числа $f(m)$ и $f(f(m))$ взаимно просты. Чтобы доказать, что взаимно просты числа m и $f(f(m))$, достаточно заметить, что $f(f(m))$ представляет собой многочлен от m со свободным членом, равным единице: $f(f(m)) = m^9 + \ldots + 1$. Далее остается провести те же рассуждения, что и при доказательстве взаимной простоты чисел m и $f(m)$.

2. Даны три числа a, b, c такие, что $a + b + c = 1$ и $a, b, c \geq 0$. Докажите, что $a(a-1)^2 + +b(b-1)^2 + c(c-1)^2 \leq \frac{4}{9}$.

Решение: Равенство $a+b+c=1$ перепишем в виде $a-1/3+b-1/3+c-1/3=0$. Замена $A=-a+1/3, B=-b+1/3, C=-c+1/3.$ И, поскольку числа a,b,c не превосходят 1, имеют место неравенства

$$A, B, C \geq -2/3. \qquad (1)$$

В новых переменных $a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 = -A^3 - A^2 - B^3 - B^2 - C^3 - C^2 + 4/9,$ и доказываемое неравенство принимает вид $A^2 + A^3 + B^2 + B^3 + C^2 + C^3 \geq 0$ или $A^2(1+A) + B^2(1+B) + C^2(1+C) \geq 0$. Это неравенство, очевидно, выполнено в силу (1).

Отметим, что возможно решение, использующее производную: несложно показать, что $\max\limits_{0 \leq x \leq 1}\left(x(x-1)^2\right) = 4/27$, *максимум достигается при* $x = 1/3$.

3. Уравнения $x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 6 = 0$ имеют два общих корня. Найдите их.

Решение: Поделим многочлен $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$ на многочлен $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 6$ с остатком: $P(x) = F(x)Q(x) + R(x)$. Общие корни многочленов $P(x), Q(x)$ являются, очевидно, и корнями остатка $R(x) = -x^3 - 2x^2 + 2x + 3$. Поделив теперь $Q(x)$ на $R(x)$, получим в остатке $-x^2 - x + 3$. Корни последнего многочлена и будут искомыми.

Ответ: $\dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

4. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $n>2015$ и $\left[\sqrt{9n+2}\right]\neq\left[\sqrt{9n+4}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

Решение: Целые части чисел a и b равны в том и только том случае, когда полуинтервал $(a,b]$ не содержит целые числа. Чтобы при каком-то натуральном n имело место неравенство $\left[\sqrt{9n+2}\right]\neq\left[\sqrt{9n+4}\right]$, должно существовать натуральное число m такое, что $\sqrt{9n+2}<m\leq\sqrt{9n+4}\Leftrightarrow 9n+2<m^2\leq 9n+4$. Следовательно, m^2 равен либо $9n+3$, либо $9n+4$. Но квадрат целого числа при делении на 9 не может дать остаток 3. Значит, остается вариант $m^2=9n+4$. Итак, будем искать такие n, при которых число $9n+4$ представляет собой полный квадрат. При делении на 9 квадрат целого числа дает остаток 4, только когда само число при делении на 9 дает остаток 2. Поэтому, полагаем $m=9t+2,\ t\in\mathrm{N}_0$. Далее $(9t+2)^2=9n+4\Leftrightarrow n=9t^2+4t$. Остается выбрать наименьшее натуральное t такое, что $9t^2+4t\geq 2015$. Для этого оценим больший корень уравнения $9t^2+4t-2015=0$:

$$t_{\max}=\frac{-2+\sqrt{4+9\cdot 2015}}{9}.$$

Поскольку $134<\sqrt{4+9\cdot 2015}<135$, заключаем, что $14<t_{\max}<15$, и искомое n равно $9\cdot 15^2+4\cdot 15=2085$.

Ответ: 2085.

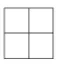
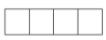
5. Имеется n целых чисел $0,1,2,\ldots,n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую *перестановку* $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$. Из исходного набора чисел $(0,1,2,\ldots,n-1)$ и этой перестановки $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ получим новый набор чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ по правилу: $a_1=r_n(0+i_1),\ a_2=r_n(1+i_2),\ldots,a_n=r_n((n-1)+i_n)$, где $r_n(m)$ – остаток от деления числа m на число n. (Например, пусть $n=3$. Тогда, из исходного набора (0,1,2) и перестановки $(i_1,i_2,i_3)=$ (1,2,0) получится набор $(a_1,a_2,a_3)=$ (1,0,2), т.к. $r_3(0+1)=1,\ r_3(1+2)=0,\ r_3(2+0)=2$.)

а) При $n=9$ приведите пример такой перестановки $(i_1,i_2,\ldots,i_9)$, что в соответствующем наборе $(a_1,a_2,\ldots,a_9)$ все числа различны;

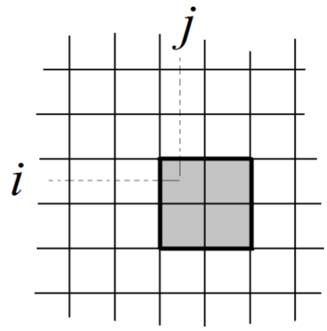
б) докажите, что, если $n=10$, то какую бы перестановку $(i_1,i_2,\ldots,i_{10})$ мы ни взяли, в наборе $(a_1,a_2,\ldots,a_{10})$ обязательно встретятся одинаковые числа.

Решение: а) Например, $(i_1,i_2,\ldots,i_9)=(1,2,3,4,5,6,7,8,0)$;

б) По условию $(0+1+\ldots+9)+(i_1+\ldots+i_{10})=a_1+\ldots+a_{10}\ (\mathrm{mod}\ 10)$. Если бы все a_i были различны, то сумма чисел в правой части была бы равна 45. Но равенство $45+45=45\ (\mathrm{mod}\ 10)$ не справедливо. Поэтому среди чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_{10})$ есть одинаковые.

6. Дно прямоугольного ящика заложили плитками двух типов так, что всё дно ими покрыто, и ни одна из плиток даже частично не накрывает другую. После транспортировки одна из плиток первого типа оказалась повреждённой, и её  -1 тип  - 2 тип заменили плиткой второго типа. Могло ли так оказаться, что все плитки снова удалось уложить в ящик так, что дно оказалось вновь полностью покрытым? Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть сейчас у нас дно ящика уложено плитками двух типов. Поставим каждой плитке в соответствие число. Рассмотрим, к примеру, плитку 1-го типа. Пусть ее верхний левый угол лежит в *i*-той строке и *j*-том столбце, то есть имеет координаты (*i*,*j*). Остальные три ячейки этой плитки имеют координаты (*i*+1,*j*), (*i*,*j*+1), (*i*+1,*j*+1). Сложим координаты всех ее четырех ячеек: $i+j+(i+1)+j+i+(j+1)+(i+1)+(j+1)=4i+4j+4,$ затем вычислим остаток от деления на 4 получившейся суммы – это 0. Итак, плитке первого типа мы поставили по определенному правилу в соответствие число (ноль), и, что важно, это число не будет меняться, если плитку передвигать. По такому же правилу, плитка 2-го типа (неважно горизонтальна она или вертикальна), после сложения координат ее ячеек и взятия остатка от деления на 4, получит в соответствие число 2. Теперь для всех плиток сложим поставленные им в соответствие числа и у полученной суммы вычислим остаток от деления на 4. Получится некоторое число *S*, которое, очевидно, равно (по модулю 4) сумме координат всех ячеек на дне ящика. Таким образом, *S* – уникальное число, которое определяется лишь размерами дна ящика (числом строк и столбцов) и *не зависит от способа замощения плитками.* Если бы после замены плитки 1-го типа на плитку 2-ого типа, вновь удалось бы замостить дно, то сумма *S* изменилась бы на 2, что невозможно.



Ответ: не могло.

7. Найдите значение выражения $a^4+b^4+c^4$, если известно, что числа a,b,c удовлетворяют соотношениям: $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ a^3+b^3+c^3=19. \end{cases}$

Решение: Обозначим $X=a+b+c,\ Y=a^2+b^2+c^2,$ $Z=a^3+b^3+c^3,\ U=ab+bc+ac.$ Тогда $X^2=Y+2U,$ откуда

$$U=\left(X^2-Y\right)/2. \tag{1}$$

Далее

$$X^3=Z+3\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\right)+6abc=$$
$$=Z+3ab(a+b+c)+3ac(a+b+c)+3bc(a+b+c)-3abc=Z+3UX-3abc.$$

Отсюда

$$abc=\left(-X^3+Z+3UX\right)/3. \tag{2}$$

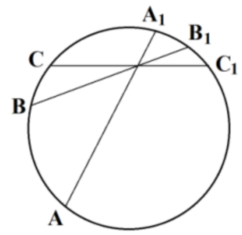
Наконец,

$$XZ=a^4+b^4+c^4+a\left(b^3+c^3\right)+b\left(a^3+c^3\right)+c\left(a^3+b^3\right)=$$
$$=a^4+b^4+c^4+\left(ab+bc+ac\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)-c^2ab-a^2bc-b^2ac=$$
$$=a^4+b^4+c^4+UY-abcX.$$

Находим искомое выражение:

$$a^4+b^4+c^4=XZ-UY+abcX. \qquad (3)$$

По условию $X=4, Y=9, Z=19$. Из (1) находим $U=7/2$, затем из (2): $abc=-1$, и с помощью (3) получаем ответ: $a^4+b^4+c^4=81/2$.



Ответ: 81/2.

8. В окружности три хорды AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Угловые меры дуг AC_1, AB, CA_1 и A_1B_1 равны соответственно $150^0, 30^0, 60^0$ и 30^0. Найдите угловую меру дуги B_1C_1.

Решение: Сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

1) Пусть угловая мера дуги AB (рис.1) равна φ. (Это означает, что φ равен соответствующий центральный угол AOB.) Тогда длина хорды $AB=2R\sin\left(\varphi/2\right)$. Здесь R – радиус окружности.

2) Пусть две хорды AA_1 и BB_1 пересекаются в точке T (рис.2). Угловые меры дуг AB и A_1B_1 равны φ и v. Треугольники ATB и A_1TB_1 подобны по двум углам (равные углы отмечены). Коэффициент подобия $k=AB/A_1B_1=\sin\left(\varphi/2\right)/\sin(v/2)$.

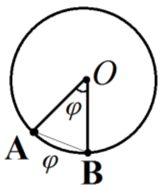


Рис.1

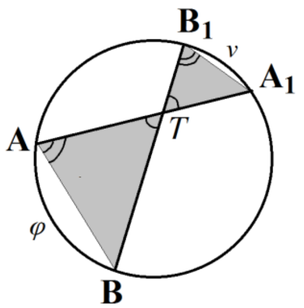


Рис.2

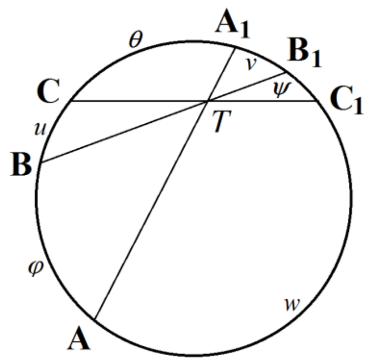


Рис.3

3) Обратимся к рисунку 3. В одной точке, обозначенной Т, пересекаются три хорды. Угловые меры получившихся шести дуг отмечены на рисунке. Из подобия треугольников ATB и A_1TB_1 следует (см. пункт 2) равенство $AT/B_1T=\sin\left(\varphi/2\right)/\sin(v/2)$. Аналогично, $\Delta BTC \sim \Delta B_1TC_1 \Rightarrow B_1T/CT=\sin\left(\psi/2\right)/\sin(u/2)$, $\Delta CTA_1 \sim \Delta ATC_1 \Rightarrow CT/AT=\sin\left(\theta/2\right)/\sin(w/2)$.

Перемножив три последних равенства, получим:

$$1=AT/B_1T\cdot B_1T/CT\cdot CT/AT=\sin\left(\varphi/2\right)/\sin(v/2)\cdot\sin\left(\psi/2\right)/\sin(u/2)\cdot\sin\left(\theta/2\right)/\sin(w/2).$$

Таким образом, необходимым (а на самом деле и достаточным) условием того, что три хорды пересекаются в одной точке является равенство:

$$\sin\left(\varphi/2\right)\sin\left(\theta/2\right)\sin\left(\psi/2\right)=\sin(u/2)\sin(v/2)\sin(w/2).$$

Теперь несложно получить ответ в задаче. Подставив в это соотношение данные задачи $w=150^0, \varphi=30^0, \theta=60^0, v=30^0$, а также выразив u из равенства $\varphi+u+\theta+v+\psi+w=360^0$, получаем для определения искомого угла ψ следующее уравнение:

$$\sin 15^0\sin(\psi/2)\sin 30^0=\sin 15^0\sin\left((90^0-\psi)/2\right)\sin 75^0.$$

Отсюда несложно получить, что $\psi = 60^0$.

Ответ: 60^0.

УСЛОВИЯ И ОТВЕТЫ ЗАДАЧ ОТБОРОЧНОГОГ ЭТАПА

9 КЛАСС

Вариант 1

1. В ответе укажите число, которое надо убрать из набора подряд идущих натуральных чисел $1,2,3,\ldots,2013$, чтобы *сумма всех остальных* чисел делилась нацело на 2014.

2. Укажите в ответе, *во сколько раз* число $((2014)^{2^{2014}} - 1)$ больше, чем число, записанное в следующем виде:
$((2014)^{2^0} + 1) \cdot ((2014)^{2^1} + 1) \cdot ((2014)^{2^2} + 1) \cdot \ldots \cdot ((2014)^{2^{2013}} + 1)$.

3. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, записано число $a_{i,j} = (-1)^i (2015 - i - j)^2$. Найдите сумму *всех* чисел в таблице.

4. Имеются два сосуда. В первом содержится **1** литр **10**-ти процентного раствора кислоты, во втором – **2** литра **60**-ти процентного. Проделали следующее действие, состоящее из двух этапов: на первом этапе из второго сосуда перелили в первый **1** литр раствора, на втором из первого перелили обратно во второй **1** литр полученной смеси. Укажите в ответе, какое *минимальное количество раз* нужно проделать такое действие, чтобы концентрация растворов в сосудах отличалась менее чем на **0,1%**?

Задача 1. Ответ: **1007.**

Задача 2. Ответ: **2013.**

Задача 3. Ответ: **0.**

Задача 4. Ответ: 5**.**

10 класс

Вариант 1.

1. Укажите в ответе, *во сколько раз* число $((2014)^{2^{2014}}-1)$ больше, чем число, записанное в следующем виде:

$((2014)^{2^0}+1)\cdot((2014)^{2^1}+1)\cdot((2014)^{2^2}+1)\cdot\ldots\cdot((2014)^{2^{2013}}+1)$.

2. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, записано число $a_{i,j}=(-1)^i(2015-i-j)^2$. Найдите сумму *всех* чисел в таблице.

3. При возведении двузначного числа в степень 2014 последняя цифра оказалась равна **1**, а предпоследняя равна **4**. Найдите *все* такие двузначные числа. В ответе укажите их сумму.

4. На плоскости изображён квадрат со стороной, равной 2014 клеткам. *Диагональ* одной клетки равна **1** см. Внутри квадрата расположен еще один квадрат *ABCD*, вершинами которого являются середины сторон исходного квадрата (рис. 2). Из точки *X* одновременно начинают двигаться две точки. Первая точка двигается со скоростью $v_1=10\,см/сек$ по часовой стрелке по сторонам квадрата *ABCD*. Вторая точка начинает двигаться до точки *N* и далее курсирует по диагонали *MN* исходного квадрата со скоростью $v_2=13\,см/сек$. Через какое *минимальное* время они встретятся в точке *Y*?

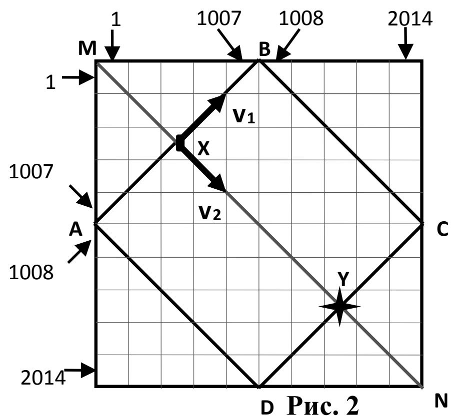


Рис. 2

Задача 1. Ответ: **2013.**

Задача 2. Ответ **0.**

Задача 3. Ответ: **11, 61**; **9, 89**.

Задача 4. Ответ: **1007** с

Вариант 1

1. Укажите в ответе число, которое надо убрать из набора подряд идущих натуральных чисел $1,2,3,\ldots,2013$, чтобы *сумма всех остальных* чисел делилась нацело на 2014?

2. *ABCDEF* – правильный шестиугольник, имеющий зеркальную внутреннюю поверхность. Из точки *A* выходит луч света и после двух отражений от сторон шестиугольника (в точках *M* и *N*), попадает в точку *D* (рис. 1). В ответе укажите тангенс угла *EAM*. Ответ округлите до сотых. Например, если $\tan EAM = \frac{1}{6}$, то в ответе необходимо указать число $0,2$. Дробную часть отделять **ЗАПЯТОЙ** !!!

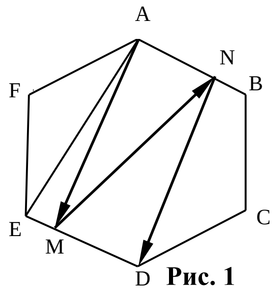


Рис. 1

3. При возведении двузначного числа в степень 2014 последняя цифра оказалась равна **1**, а предпоследняя равна **4**. Найдите *все* такие двузначные числа. В ответе укажите сумму данных чисел.

4. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, записано число $a_{i,j} = (-1)^i (2015 - i - j)^2$. В ответе укажите сумму *всех* чисел в таблице.

11 класс

Вариант 1

1. Укажите в ответе число, которое надо убрать из набора подряд идущих натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 2013$, чтобы *сумма всех остальных* чисел делилась нацело на 2014?

2. *ABCDEF* – правильный шестиугольник, имеющий зеркальную внутреннюю поверхность. Из точки *A* выходит луч света и после двух отражений от сторон шестиугольника (в точках *M* и *N*), попадает в точку *D* (рис. 1). В ответе укажите тангенс угла *EAM*. Ответ округлите до сотых.

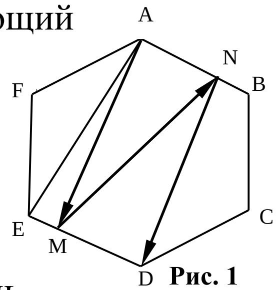


Рис. 1

3. При возведении двузначного числа в степень 2014 последняя цифра оказалась равна **1**, а предпоследняя равна **4**.

Найдите *все* такие двузначные числа. В ответе укажите сумму данных чисел.

4. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, записано число $a_{i,j} = (-1)^i (2015 - i - j)^2$. В ответе укажите сумму *всех* чисел в таблице.

Задача 1 Ответ: 1007.

Задача 1. Ответ: 0,2.

Задача 3. Ответ: 200.

Задача 4. Ответ: 0.